Ф9.1 Пароход, движущийся из США в Лондон, использует 15 кг угля за одну секунду, причём КПД его двигателей $\eta = 10\%$. Определите установившуюся скорость его движения, если известно, что сила сопротивления воды равна $F = k \cdot v$, где $k = 300\dfrac{\text{кН}\cdot\text{с}}{\text{м}}$. Удельная теплота сгорания угля $q = 20\dfrac{\text{МДж}}{\text{кг}}$.

Решение. Мощность двигателя равна $P = \dfrac{\eta \cdot m \cdot q}{t} = \dfrac{0.1 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 10^6}{1} = 3 \cdot 10^7$ Вт. **(3 балла)**
Мощность сил сопротивления: $P = Fv = kv^2$. **(3 балла)**

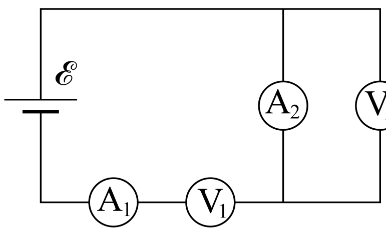
При установившейся скорости мощности совпадают, откуда: $v = \sqrt{\dfrac{\eta \cdot m \cdot q}{kt}}$. **(3 балла)**

Ответ: $10\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$. **(1 балл)**

Ф9.2 Из сосуда, в котором изначально находилось некоторое количество воды при $0°C$, непрерывно откачивают газ. Вода в сосуде постепенно замерзает за счет испарения. Какую долю от исходного количества воды можно таким образом превратить в лёд?
Указание. Процесс возгонки (испарения твердого тела, минуя жидкое состояние) не учитывать. Удельная теплота парообразования воды r и ее удельная теплота кристаллизации λ связаны соотношением $\dfrac{r}{\lambda} = \alpha = 6{,}7$.

Решение. Необходимое для образования пара тепло может быть получено только за счет теплоты $Q = \lambda m_1$, освобождающейся при замерзании воды **(2 балла)**. При этом в пар превращается вода массой m_2 такая, что $Q = rm_2$ **(2 балла)**. Находим тогда: $m_2 = m_1\dfrac{\lambda}{r} = \dfrac{m_1}{\alpha}$ **(3 балла)**.
Масса воды до начала откачивания $m = m_1 + m_2$, откуда $\dfrac{m_1}{m} = \dfrac{\alpha}{\alpha + 1} = 0{,}87$ **(3 балла)**.

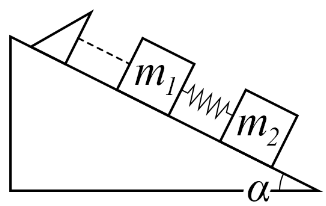
Ф9.3 Два одинаковых амперметра и два одинаковых вольтметра включены в схему на рисунке. Амперметры показывают токи $I_1 = 100$ мкА и $I_2 = 99$ мкА, а вольтметр V_1 напряжение $U_1 = 10$ В. Какое напряжение показывает вольтметр V_2? Сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь.



Решение. Показание вольтметра V_2: $U_2 = I_v R_v$ **(3 балла)**, где I_v — сила тока через вольтметр, $I_v = I_1 - I_2$ **(1 балл)**. Так как вольтметры одинаковы , то сопротивление каждого $R_v = \dfrac{U_1}{I_1}$ **(3 балла)**.

Следовательно, $U_2 = (I_1 - I_2)\dfrac{U_1}{I} = 0{,}1$ В **(3 балла)**.

Ф9.4 Два грузика массами m_1 и m_2 соединены пружинкой, грузик m_1 закреплен нитью на гладкой горке (см. рис., нить обозначена пунктирной линией). Найдите ускорение грузика m_1 сразу после того как нить перерезали. Угол α считайте известным.



Решение. До пережигания нити растяжение пружины l находится из условия покоя второго грузика: $kl = m_2 g \sin\alpha$ **(3 балла)**.
Запишем второй закон Ньютона в проекции на горку для первого грузика: $m_1 a(t) = m_1 g \sin\alpha + kl(t)$ **(3 балла)**. В момент $t = 0$ имеем $kl(0) = m_2 g \sin\alpha$ **(2 балла)**, откуда $a(0) = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1} g \sin\alpha$ **(2 балла)**.

M9.1 Докажите, что для длин сторон a, b, c произвольного треугольника справедливо неравенство $ab + bc + ac > \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Решение. Сразу следует из положительности величины $c(a + b - c) + b(a + c - b) + a(b + c - a)$.

M9.2 Окружность ω проходит через центр O окружности Ω и пересекает её в точках X и Y. Через точку X проведена касательная к окружности ω, а точка Z — вторая точка пересечения этой касательной с Ω. Найдите отношение XY к XZ.

Решение. Треугольники ZOX и YOX равнобедренные с равными углами $OXZ = OYX$, поэтому они равны **(8 баллов)**, а значит, $XY = XZ$ **(2 балла)**.

M9.3 Сколько способов разбить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой половине был хотя бы один туз? Порядок половин не важен.

Решение. Выберем одну половину колоды, а вторая наберётся автоматически. Если в этой половине два туза, то выбрать её можно $C_4^2 \cdot C_{32}^{16}/2$ способами **(4 балла)**. А если в ней один туз, то она выбирается $C_4^1 \cdot C_{32}^{17}$ способами **(4 балла)**. Итог: $C_4^2 \cdot C_{32}^{16}/2 + C_4^1 \cdot C_{32}^{17}$ **(2 балла)**.

M9.4 Докажите, что для любых натуральных чисел m и k найдется такое натуральное число n, что $(\sqrt{m+1} - \sqrt{m})^{2^k} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Решение. Докажем сначала, что для любого натурального m найдется натуральное t такое, что $(\sqrt{m+1} - \sqrt{m})^2 = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$. **(4 балла за эту идею)**
Действительно, $(\sqrt{m+1} - \sqrt{m})^2 = m + 1 - 2\sqrt{m+1}\sqrt{m} + m = 2m + 1 - 2\sqrt{(m+1)m} =$ $= \sqrt{(2m+1)^2} - \sqrt{4(m+1)m} = \sqrt{4m^2 + 4m + 1} - \sqrt{4m^2 + 4m}$. То есть $t = 4m^2 + 4m$.
Доказываемое утверждение следует из того, что $(\sqrt{m+1} - \sqrt{m})^{2^k} = \left((\sqrt{m+1} - \sqrt{m})^2\right)^{2^{k-1}} =$ $= (\sqrt{t+1} - \sqrt{t})^{2^{k-1}} = \ldots = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Ф10.1 Материальная точка массой 0,5 кг движется по окружности с постоянной по модулю скоростью $v = 3$ м/с. Найти модуль изменения импульса материальной точки за время, равное 1/12 периода вращения.

Решение. Направим ось OX вдоль начального направления вектора импульса. Тогда в начальный момент $p_{x0} = p$, $p_{y0} = 0$ **(1 балл)**, а в конечный момент $p_{x1} = p\cos\alpha$, $p_{y1} = p\sin\alpha$ **(1 балла)**. Модуль изменения импульса находим по теореме Пифагора **(4 балла)**: $\Delta p = \sqrt{(p\cos\alpha - p)^2 + (p\sin\alpha - 0)^2} = p\sqrt{1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = p\sqrt{2 - 2\cos\alpha} = p\sqrt{4\sin^2(\alpha/2)} = 2p\sin(\alpha/2) = 2mv\sin 15°$. **(4 балла)**

Ф10.2 Камень брошен под углом α к горизонту вверх с начальной скоростью, равной по модулю v_0. Сразу после этого по той же самой траектории за камнем запускают дрон, всё время полёта движущийся с постоянной по модулю скоростью. Модуль скорости дрона также равен v_0. Найдите ускорение дрона в момент, когда он находится на максимальной высоте.

Решение. Скорость камня в верхней точке: $v_1 = v_0\cos\alpha$ **(2 балла)**. Тогда радиус кривизны траектории в этой точке: $\rho = \dfrac{v_1^2}{g} = \dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$ **(4 балла)**. Так как касательная компонента ускорения по условию отсутствует **(1 балла)**, ускорение дрона в верхней точке траектории находим так: $a = \dfrac{v_0^2}{\rho} = \dfrac{g}{\cos^2\alpha}$ **(3 балла)**.

Ф10.3 В цилиндре под поршнем находится одноатомный идеальный газ, а на его дне — небольшой нагреватель с полезной мощностью N. Цилиндр расположен вертикально. Определите скорость, с которой поршень начнёт движение после включения нагревателя. Считайте, что нагревание происходит медленно, а цилиндр теплоизолирован. Площадь поперечного сечения цилиндра равна S, атмосферное давление равно P_0.

Решение. На поршень действуют вниз силы mg и P_0S, а вверх сила давления в цилиндре PS. При равномерном движении $P_0S + mg = PS$, откуда $P = \dfrac{P_0S + mg}{S}$ **(2 балла)**. Из первого закона термодинамики $Q = P\Delta V + \dfrac{3}{2}\nu RT = \dfrac{5}{2}P\Delta V$ **(2 балла)**. При этом работа нагревателя $A = Nt$ **(1 балл)**, а изменение объёма за это же время равно $\Delta V = vtS$ **(1 балл)**. Из закона сохранения энергии $Nt = \dfrac{5}{2}PvtS$ **(2 балла)**, откуда $v = \dfrac{2N}{5PS} = \dfrac{2N}{5(P_0S + mg)}$ **(2 балла)**.

Указание. Поскольку масса m в условии не была дана, ей можно пренебрегать, т. е. выкладки выше с $m = 0$ оцениваются полным баллом.

Ф10.4 В одной из моделей океана полагается, что скорость звука изменяется с глубиной линейно: $v(z) = v_0(1 + cz)$, где v_0 — скорость на поверхности океана, а ось z направлена вниз. С лодки на поверхности воды «излучают» звук под углом α к поверхности вниз. На какую максимальную глубину он может проникнуть под воду? Закон преломления звуковой волны совпадает с соответствующим законом преломления света.

Решение. Разобъём океан на тонкие горизонтальные слои с приблизительно постоянной скоростью звука в каждом слое. В каждом слое можно записать закон преломления $\dfrac{\sin\varphi_k}{\sin\varphi_{k+1}} = \dfrac{v_k}{v_{k+1}}$ **(4 балла за разбиение на тонкие слои и закон преломления в каждом)**. Перемножив все эти соотношения, получим $\dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_n} = \dfrac{v_1}{v_n}$ **(ещё 3 балла)**. Обозначим искомую максимальную глубину через H. Тогда $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\varphi(H)} = \dfrac{v_0}{v(H)}$. В самой глубокой точке $\varphi(H) = 90°$, откуда $\sin\alpha = \dfrac{v_0}{v_0(1 + cH)}$, откуда $H = \dfrac{1 - \sin\alpha}{c\sin\alpha}$ **(3 балла)**.

М10.1 Для каких натуральных чисел m среди чисел 1, 1/2, 1/3, … найдётся арифметическая прогрессия длины m?

Решение. Для любых. Возьмём $1/m!$, $2/m!$, $3/m!$, …, $m/m!$.

М10.2 В комоде лежат носки чёрного и белого цвета. Если из ящика наудачу вытянуть 2 носка, то вероятность, что они оба одного цвета, равна вероятности вытащить оба носка разных цветов. Каково максимальное число носков, если их в комоде не более 2021?

Решение. Пусть белых носков w штук, а чёрных b штук. Тогда по условию $\dfrac{C_b^2}{C_{b+w}^2}+\dfrac{C_w^2}{C_{b+w}^2}=\dfrac{1}{2}$, **(3 балла)** что несложно переписать в виде $\dfrac{b!}{(b-2)!}+\dfrac{w!}{(w-2)!}=\dfrac{(w+b)!}{2(w+b-2)!}$ или $b(b-1)+w(w-1)=(b+w)(b+w-1)/2$. Последнее равносильно $(b-w)^2=b+w$ **(4 балла)**. Максимальным число носков $b+w$ будет, если взять наибольший квадрат, не превосходящий 2021. Это число $1936=44^2$ **(3 балла)**. При этом $b+w=1936$, $b-w=44$, откуда $w=946$, $b=990$.

М10.3 Докажите, что если все квадраты, вписанные в треугольник так, что две вершины расположены на стороне треугольника, а две другие вершины на двух других сторонах треугольника, равны между собой, то треугольник равносторонний.

Решение. С помощью подобия легко выразить стороны данных квадратов: если вершины треугольника равны a, b, c, то для квадрата со стороной x, лежащей на стороне a, можем записать $\dfrac{a}{x}=\dfrac{h_a}{h_a-x}$ **(2 балла)**, где h_a — высота к стороне a. Отсюда (т. к. $h=\dfrac{2S}{a}$) $x=\dfrac{2S}{a+2S/a}$ **(ещё 1 балл)**. По условию $a+2S/a=b+2S/b=c+2S/c$. Первое равенство несложно привести к виду $(a-b)\left(1-\dfrac{2S}{ab}\right)$ **(4 балла)**, а значит, либо $a=b$, либо $2S=ab$. В последнем случае треугольник прямоугольный. Но из второго равенства также либо $b=c$, либо $2S=bc$. Итак, если треугольник не является равносторонним, то у него должно быть хотя бы два прямых угла, что невозможно. **(Оставшаяся часть решения: 3 балла)**

М10.4 Пусть x_1, …, x_n — переставленные в некотором порядке числа от 1 до n. Рассматривается произведение $(1+x_1)\cdot(2+x_2)\cdot\ldots\cdot(n+x_n)$.

1. Докажите, что это произведение не превосходит $2^n n^n$.

2. Вычислите наибольшее возможное значение такого произведения.

Решение. Очевидно, каждая скобка не больше, чем $n+n$, откуда следует искомая оценка для первого пункта. **(2 балла)**

Для второго пункта используем неравенство Коши: $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}\leq\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$. **(3 балла)**

Следовательно, можем оценить

$$(1+x_1)\cdot(2+x_2)\cdot\ldots\cdot(n+x_n)\leq\left(\frac{2(1+2+\ldots+n)}{n}\right)^n=(n+1)^n.$$

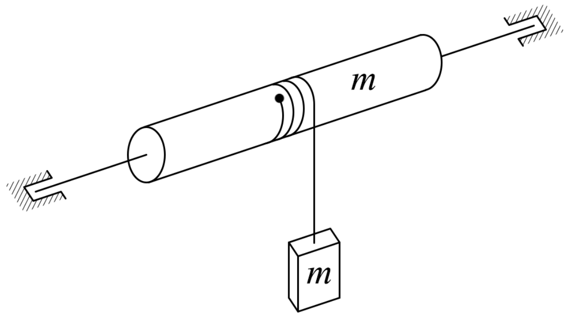
(3 балла)

Равенство достигается в случае $x_1=n;\ x_2=n-1;\ \ldots\ x_n=1$. **(2 балла)**

Ф11.1 От потолка комнаты, пол которой покрыт слоем абсолютно упругого материала, без начальной скорости и в случайные моменты времени отпускают N (существенно большее единицы) одинаковых шариков массой m. Определите среднее значение давления этих шариков на пол комнаты. Трением и сопротивлением воздуха можно пренебречь. Высота комнаты равна h, а объём равен V.

Решение. Движение шариков считаем вертикальным. Импульс одного шарика у дна равен $P = m\sqrt{2gh}$ **(2 балла)**. Время полёта одного шарика равно $2\sqrt{2h/g}$, считаем его периодом движения системы **(2 балла)**. За это время импульс всей системы меняется на $\Delta P = 2m\sqrt{2gh}\cdot N$ **(3 балла)**. Среднее давление находится как $\dfrac{\Delta P}{2\sqrt{2h/g}\cdot(V/h)} = \dfrac{Nmgh}{V}$ **(3 балла)**.

Ф11.2 Горизонтально расположенная трубка может свободно и без трения вращаться вокруг своей оси. К её поверхности прикрепляют верёвку, к которой подвешивают грузик. Эту верёвку наматывают на трубку, после чего отпускают грузик без начальной скорости. Найдите угловую скорость вращения трубки в момент, когда грузик переместится на расстояние h. Считайте трубку тонкостенной, верёвку невесомой и нерастяжимой. Массы грузика и трубки равны, но их масса неизвестна. Радиус поперечного сечения трубки R.



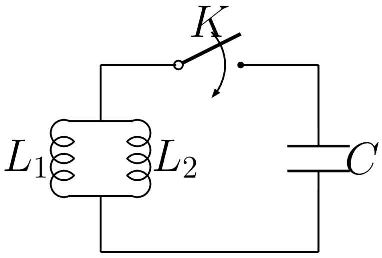
Решение. На приобретение грузом скорости и вращение трубки расходуется только потенциальная энергия груза mgh **(2 балла)**. Груз приобретает скорость v. Веревка нерастяжима, а поэтому каждая ее точка движется с той же скоростью, что и груз. Тогда и все точки поверхности трубы вращаются с этой скоростью, а кинетическая энергия вращения трубы также равна $\dfrac{mv^2}{2}$ **(3 балла)**.

Закон сохранения энергии даёт $2\dfrac{mv^2}{2} = mgh$ **(2 балла)**, откуда $v = \sqrt{gh}$ **(1 балл)**. Поэтому $v = \omega R$ **(1 балл)**, а значит, $\omega = \dfrac{\sqrt{gh}}{R}$ **(1 балл)**.

Ф11.3 В одной из моделей океана полагается, что скорость звука изменяется с глубиной линейно: $v(z) = v_0(1 + cz)$, где v_0 — скорость на поверхности океана, а ось z направлена вниз. С лодки на поверхности воды «излучают» звук под углом α к поверхности вниз. На какую максимальную глубину он может проникнуть под воду? Закон преломления звуковой волны совпадает с соответствующим законом преломления света.

Решение. Разобъём океан на тонкие горизонтальные слои с приблизительно постоянной скоростью звука в каждом слое. В каждом слое можно записать закон преломления $\dfrac{\sin\varphi_k}{\sin\varphi_{k+1}} = \dfrac{v_k}{v_{k+1}}$ **(4 балла за разбиение на тонкие слои и закон преломления в каждом)**. Перемножив все эти соотношения, получим $\dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_n} = \dfrac{v_1}{v_n}$ **(ещё 3 балла)**. Обозначим искомую максимальную глубину через H. Тогда $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\varphi(H)} = \dfrac{v_0}{v(H)}$. В самой глубокой точке $\varphi(H) = 90^\circ$, откуда $\sin\alpha = \dfrac{v_0}{v_0(1+cH)}$, откуда $H = \dfrac{1-\sin\alpha}{c\sin\alpha}$ **(3 балла)**.

Ф11.4 Конденсатор ёмкости C, заряженный до разности потенциалов U, подключен к катушкам индуктивности L_1 и L_2 через ключ К. Если замкнуть ключ, то через некоторое время конденсатор полностью перезарядится (т. е. напряжение на обкладках конденсатора поменяет знак). Какие заряды q_1 и q_2 протекут через катушки за это время? Омическими сопротивлениями катушек пренебречь.



Решение. Так как L_1 и L_2 параллельны, ток в начальный момент равен нулю, можем записать $L_1\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t} = L_2\dfrac{\Delta I_2}{\Delta t} \Rightarrow L_1I_1 = L_2I_2$ **(4 балла)**. Далее, отношение протекших зарядов $\dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{L_2}{L_1}$ **(3 балла)**, откуда с учётом $q_1 + q_2 = 2CU$ **(2 балла)** находим $q_1 = \dfrac{2L_2CU}{L_1+L_2}$ и $q_2 = \dfrac{2L_1CU}{L_1+L_2}$ **(1 балл)**.

М11.1 Найдите хотя бы одну функцию f, определённую при $x > 0$, удовлетворяющую соотношению $f(x) = f(2x)$, и не являющуюся константой.

Решение. Подойдёт $\sin(2\pi\log_2 x)$.

М11.2 Две концентрические окружности имеют радиусы R и $2R$. Рассматриваются всевозможные треугольники AOB, где O — центр окружностей, а точки A и B лежат на различных окружностях. Пусть высота, проведенная к стороне AB в таком треугольнике, имеет длину h. Найдите наибольшее возможное отношение $\dfrac{h}{AB}$.

Решение. Введем угол $\alpha = \angle AOB$. Тогда $AB^2(\alpha) = R^2 + 4R^2 - 2\cdot 2R^2\cos\alpha$, высота $h(\alpha) = \dfrac{R\cdot 2R\cdot\sin\alpha}{AB(\alpha)}$. Искомое отношение равно $\dfrac{h}{AB} = \dfrac{2\sin\alpha}{5-4\cos\alpha}$. Удобнее находить минимум $\dfrac{AB}{h} = \dfrac{5}{2\sin\alpha} - 2\operatorname{ctg}\alpha$. Он достигается при $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$.
Критерии: **(7 баллов)** за составление функции одной переменной, которую нужно минимизировать для решения задачи. **(3 балла)** за успешную минимизацию.

М11.3 Сколько способов расставить 2 ладьи на шахматное поле 8×8 так, чтобы они не били друг друга, причем хотя бы одна ладья стояла на диагонали?

Решение. Если обе ладьи стоят на диагонали, то вариантов выбора $16\cdot 13/2$ **(4 балла)**, а если одна на диагонали, а вторая нет, то вариантов $16\cdot(64-16-12)$ (первая ладья выбирается на одной из 16 клеток диагонали, а вторая — на любых из $64-16$ клеток, кроме диагональных, за вычетом тех, что лежат с выбранной на одной вертикали или горизонтали) **(4 балла)**. Эти варианты надо сложить **(2 балла)**. В итоге получаем $8\cdot 13 + 16\cdot 36$ способов.

М11.4 Зафиксируем натуральное число k. Пусть

$$f_k(n) = \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)}, n\in\mathbb{N}.$$

Найдите такую функцию $F_k(n)$, что $f_k(n) = F_k(n+1) - F_k(n)$. С помощью этой функции вычислите сумму $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} f_k(n)$.

Решение. $f_k(n) = \dfrac{1}{k}\dfrac{n+k-n}{n\cdot\ldots\cdot(n+k)} = \dfrac{1/k}{n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)} - \dfrac{1/k}{(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k)}$, откуда $F_k(n) = \dfrac{-1/k}{n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}$ **(5 баллов)**, а сумма равна

$$F_k(m+1) - F_k(1) = \frac{1}{k\cdot k!} - \frac{1}{k\cdot(m+1)\cdot(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+1+k-1)}.$$

(5 баллов за вычисление суммы)